Ministerul Educaţiei şi Cercetării
Serviciul Naţional de Evaluare şi Examinare

Olimpiada Naţională de Matematică 2005

Etapa judeţeană şi a municipiului Bucureşti

5 martie 2005

CLASA A XI-A

Subiectul 1. Notăm cu H mulţimea matricelor pătrate de ordin $n \geq 2$, ale căror elemente sunt numere naturale şi cu P mulţimea matricelor din H cu proprietatea că suma elementelor de pe fiecare linie şi de pe fiecare coloană este egală cu 1.

a) Arătaţi că dacă $A \in P$, atunci $\det A \in \{-1, 1\}$.

b) Arătaţi că dacă $A_1, A_2, \ldots, A_p \in H$ şi produsul $A_1 A_2 \cdots A_p \in P$, atunci $A_1, A_2, \ldots, A_p \in P$.

Subiectul 2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, pentru care $f(a) = f(b)$, există $c \in (a, b)$ cu $f(a) = f(b) = f(c)$. Arătaţi că f este monotonă pe $\mathbb{R}$.

Subiectul 3. a) Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $\operatorname{rang} A > \operatorname{rang} B$. Arătaţi că $\operatorname{rang}(A^2) \geq \operatorname{rang}(B^2)$.

b) Determinaţi polinoamele neconstante cu coeficienţi reali f cu proprietatea că pentru orice matrice $A, B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ cu $\operatorname{rang} A > \operatorname{rang} B$ are loc relaţia $\operatorname{rang} f(A) \geq \operatorname{rang} f(B)$.

Subiectul 4. Fie $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ o funcţie bijectivă şi monotonă.

a) Arătaţi că există o unică funcţie continuă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $F(x) = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{Q}$.

b) Daţi un exemplu de funcţie polinomială $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neinjectivă, cu proprietatea că $G(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ şi restricţia ei la $\mathbb{Q}$ să fie injectivă.

Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii